

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ a, & x \geq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____

解: $a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{\downarrow \text{无穷小}} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\rightarrow \text{有界量}} = 0$

2. 函数 $y = \frac{1}{\ln(x-1)}$ 连续区间为 _____

解: 由于一切初等函数在其定义区间内都是连续的, $y = \frac{1}{\ln(x-1)}$

的定义域为 $x > 1$, 即 $(1, +\infty)$ 为函数的连续区间.
 $\cup (1, 2)$

3. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

解法一, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$
 (分子有理化)

解法二, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2}$ (等价无穷小替换)

注: $(1+x)^2 - 1 \sim 2x$ ($x \rightarrow 0$)

4. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x(x^2 - 1)}$ 可去间断点为 $x =$ _____

解: 显然 $x=0$, $x=-1$, $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的间断点.

在 $x=0$ 处, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x + 3}{x(x^2 - 1)} = \infty$

在 $x=-1$ 处, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x(x^2 - 1)} \neq \frac{(-1)^2 - 4(-1) + 3}{(-1)((-1)^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-1)(x+1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-3}{x(x+1)} = \infty$

在 $x=1$ 处 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-1)(x+1)} = -1$

所以, $x=0$, $x=-1$ 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点, $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

同步练习 2.4 p28-29 廖国勇 2016.9.27

二. 1. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续, 且 $f(2)=3$, 求 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \left[\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right]$

解: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \left[\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \frac{1}{x+2} = 3 \cdot \frac{1}{2+2} = \frac{3}{4}$$

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{\sin x}}$

解: $\because \lim_{x \rightarrow 0} (2x \cdot \frac{1}{\sin x}) = 2 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^2$

注. 对于求 $\lim_{x \rightarrow \square} (1+\alpha(x))^{\beta(x)}$, (若 $\lim_{x \rightarrow \square} \alpha(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \square} \beta(x) = \infty$)

其解法为,

$$\lim_{x \rightarrow \square} (1+\alpha(x))^{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow \square} \left[(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right]^{\alpha(x)\beta(x)} \xrightarrow{e}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \square} \left\{ (1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow \square} \alpha(x)\beta(x)}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \square} \alpha(x)\beta(x)}$$

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ 有界量

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right]$ (和差化积公式)

无穷小

$$= 0$$

$$\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \sim \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \text{ 为无穷小}$$

同步练习 P29

廖国勇

4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ ($a > 0, b > 0$)

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x + b^x - 2}{2} \right)^{\frac{2}{a^x + b^x - 2} \cdot \frac{a^x + b^x - 2}{2x}}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x - 2}{2x}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{a^x - 1}{x} + \frac{b^x - 1}{x} \right)} = e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)}$$

$$= e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

($a^x - 1 \sim x \ln a, b^x - 1 \sim x \ln b$)

5. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 求 a, b

解: 若 $|x| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} = ax^2 + bx$

若 $|x| > 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} = \frac{1}{x}$

若 $x = 1, f(x) = \frac{1+a+b}{2}$

若 $x = -1, f(x) = \frac{-1+a-b}{2}$

于是 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < -1 \\ \frac{-1+a-b}{2}, & x = -1 \\ ax^2 + bx, & -1 < x < 1 \\ \frac{1+a+b}{2}, & x = 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$

由 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, $f(x)$ 在 $x = -1$ 处, $x = 1$ 处连续

$$\begin{cases} f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \\ f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = \frac{-1+a-b}{2} \\ \frac{1+a+b}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$$

6. 设函数 $f(x) = \frac{\csc x - \cot x}{x}$ ($x \neq 0$) 在 $x=0$ 处连续, 求 $f(0)$

$$\begin{aligned} \text{解: } f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x - \cot x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

7. 讨论函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x}{2+x^2+e^{tx}}$ 的连续性.

$$\text{解: } x=0 \text{ 时, } f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0}{2+0^2+e^{t \cdot 0}} = 0$$

$$x>0 \text{ 时, } f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x}{2+x^2+e^{tx}} = 0$$

$$x<0 \text{ 时, } f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x}{2+x^2+e^{tx}} = \frac{x}{2+x^2}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2+x^2} & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{由于 } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续

注, 一切初等函数在其定义区间内都是连续的。

P30. 求 $f(x) = \frac{|x|(x-2)}{x(x^2-3x+2)}$ 的间断点并分类.

廖国勇

解: 令 $x(x^2-3x+2)=0$ 得 $x=0, x=1, x=2$ 为函数 $f(x)$ 的间断点.

$$\text{对于 } x=0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)(x-2)}{x(x-2)(x-1)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x-1)} = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\text{对于 } x=1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|(x-2)}{x(x^2-3x+2)} = \infty$$

$$\text{对于 } x=2, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x|(x-2)}{x(x-2)(x-1)} = 1$$

综上所述, $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的无穷间断点.

$x=2$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点.

9. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x} & x > 0 \end{cases}$ 的连续性

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cdot \frac{1}{2}x}{x} = 1 = f(0)$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

10 求 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} \right)$ 的间断点并分类.

廖国勇

解: $x = \pm 1$ 时, $f(x) = 0$

$$|x| > 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = -1$$

$$|x| < 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = 1$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$$

$f(x)$ 的间断点为 $x = -1$ 和 $x = 1$, 都是跳跃间断点.

三. 证明题

1. 证明方程 $\ln x = \frac{2}{x}$ 在 $(1, e)$ 内至少有一个实根

证明: 设 $f(x) = \ln x - \frac{2}{x}$, 显然 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上连续

$$f(1) = \ln 1 - \frac{2}{1} = -2 < 0, \quad f(e) = \ln e - \frac{2}{e} = 1 - \frac{2}{e} > 0$$

$f(1) \cdot f(e) < 0$, 由连续函数在闭区间上的零点定理知

$\exists \xi \in (1, e)$ 使得 $f(\xi) = 0$, 即方程 $\ln x = \frac{2}{x}$ 在 $(1, e)$ 内

至少有一个实根。

同步练习 P32 P

廖国勇

2. 设函数 $f(x) = 1 + \sin x$, 证明至少存在一点 $C \in (0, \pi)$, 使 $f(C) = C$

证明: 设 $F(x) = f(x) - x = 1 + \sin x - x$, 显然 $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续

$$F(0) = 1 + \sin 0 - 0 = 1 > 0, F(\pi) = 1 + \sin \pi - \pi = 1 - \pi < 0$$

$$F(0) \cdot F(\pi) < 0, \text{由零点定理知, } \exists C \in (0, \pi), \text{使得 } F(C) = 0$$

$$\text{即 } f(C) = C$$

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2)$, 证明至少存在一点 $\xi \in [0, 1]$

使 $f(\xi) = f(1+\xi)$.

证明: 设 $F(x) = f(x) - f(1+x)$, 显然 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续

$$F(0) = f(0) - f(1) = f(2) - f(1) = -[f(1) - f(2)] = -F(1)$$

① 若 $F(0) = 0$, 则 $f(0) = f(1)$, 取 $\xi = 0$ 即可

② 若 $F(0) \neq 0$, 则 $F(0) \cdot F(1) = -[F(0)]^2 < 0$, 由零点定理

$\exists \xi \in (0, 1)$ 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = f(1+\xi)$

综合 ①② 知, 至少存在一点 $\xi \in [0, 1]$, 使得 $f(\xi) = f(1+\xi)$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

证明: 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$

由 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Rightarrow$ 对于 $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x| > \delta$ 时, $|f(x) - A| < 1$

即 $A - 1 < f(x) < A + 1$, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty)$ 上有界.

$f(x)$ 在 $[-\delta, \delta]$ 上连续. 所以 $f(x)$ 在 $[-\delta, \delta]$ 上有界

综上所述, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

同步练习 2.4. P32. 理学院 廖国勇 2016.9.27.